Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS MMV

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (12 questions) **Page 3**

2. Série de Fourier d'une fonction périodique paire (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 12**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmmv.fr/assets/annales/bts-mmv/E2 - Mathématiques/2023/BTS MMV - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond du tiroir, repéré par M, et le fond du meuble, repéré par O, est modélisée par f(t), en centimètres, en fonction du temps t en secondes. L'exercice mobilise une équation différentielle, une étude de fonction, un algorithme et le calcul d'une position moyenne.

Partie A

Question 1. a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On cherche les racines du trinôme caractéristique. Sa factorisation est $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. En appliquant la règle du produit nul, on obtient $r + 1 = 0$ ou $r + 4 = 0$. L'équation possède donc deux racines réelles distinctes. Elles permettent ensuite de choisir, dans le tableau fourni, la forme adaptée pour la solution générale de l'équation différentielle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1. b. Résoudre l'équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0 en s'appuyant sur le tableau fourni.

L'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes, $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$. Le tableau du sujet associe à ce cas une solution de la forme $y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$. En remplaçant les racines par leurs valeurs, on obtient la solution générale. Les constantes C_1 et C_2 sont réelles et pourront être déterminées avec des conditions initiales.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2. a. À partir de la situation initiale, où M est à 20 cm de O et se déplace vers O avec une vitesse négative de -10 cm·s⁻¹, déterminer f(0) et f'(0).

Grandeur à $t = 0$	Interprétation	Valeur
$f(0)$	Distance initiale OM	20 cm
$f'(0)$	Vitesse initiale, dirigée vers O	-10 cm·s^{-1}

La fonction donne la distance OM, donc sa valeur initiale est 20 cm. Sa dérivée donne la vitesse de déplacement. Le signe négatif traduit ici le rapprochement du point M vers O.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2. b. **Sachant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

On remplace t par 2 dans l'expression de la distance. Le second terme contient alors l'exposant $-4 \times 2 = -8$, tandis que le premier contient -2. La distance exacte s'écrit donc comme une combinaison d'exponentielles, en centimètres. Pour contrôler l'ordre de grandeur, son évaluation décimale donne environ $3{,}16$ cm.

Le calcul numérique ne remplace pas l'expression exacte demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $OM = f(2) = \dfrac{70}{3}e^{-2} - \dfrac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2. c. **Le tiroir est dit fermé lorsque OM est inférieure à 0,5 cm. Dire si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, et justifier.**

La distance initiale est $f(0) = 20$ cm, supérieure au seuil de fermeture. À quatre secondes, la formule donne :

- $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}427$ cm.
- Cette valeur est strictement inférieure à $0{,}5$ cm.

La fonction est continue. Comme elle passe d'une valeur supérieure au seuil à une valeur inférieure avant l'instant 4, le seuil est franchi avant quatre secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : le seuil de $0{,}5$ cm est franchi avant 4 s, car $f(4) \approx 0{,}427$ cm.

Partie B

Question 1. a. **En utilisant la limite rappelée de e⁻ᵘ lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

La fonction est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, les quantités t et $4t$ tendent vers $+\infty$. Ainsi, les deux exponentielles tendent vers zéro, conformément à la limite rappelée dans le sujet. La limite de leur combinaison linéaire est donc également nulle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0.$

Question 1. b. Déduire de la limite précédente que la courbe C représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut zéro. Par définition, la courbe représentative d'une fonction qui admet une limite finie en $+\infty$ possède une asymptote horizontale d'ordonnée égale à cette limite. Ici, cette asymptote est donc l'axe des abscisses, dont l'équation est $y = 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2. a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive séparément les deux termes de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. La dérivée de e^{-t} est $-e^{-t}$, et celle de e^{-4t} est $-4e^{-4t}$, par la règle de dérivation d'une composée. En tenant compte du signe moins devant le second terme, on obtient l'expression suivante pour tout $t \geq 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) = -\dfrac{70}{3}e^{-t} + \dfrac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2. b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, déduire le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Le sujet admet que $f'(t) < 0$ sur l'intervalle étudié : la fonction est donc strictement décroissante. À l'origine, $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$, et sa limite en $+\infty$ vaut zéro. Le tableau de variations rassemble ces résultats.

t	0	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variations de f	20	$\searrow 0$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne 36, en indiquant les valeurs de t, de f(t) arrondies à 10⁻² et de la condition, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

La boucle ajoute $0{,}1$ à t tant que $f(t) > 0{,}5$. Les conditions sont évaluées avec les valeurs non arrondies de la fonction; les valeurs affichées de $f(t)$ sont arrondies au centième.

Ligne	t	$f(t)$, arrondi à 10^{-2}	Condition $f(t) > 0{,}5$
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

L'algorithme s'arrête après l'évaluation de la ligne 39.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Lignes 36 à 39 : $(3{,}6 ; 0{,}64 ; V)$, $(3{,}7 ; 0{,}58 ; V)$, $(3{,}8 ; 0{,}52 ; V)$, $(3{,}9 ; 0{,}47 ; F)$.

Question 3. b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.

À $t = 3{,}8$, la distance vaut environ $0{,}52$ cm, donc la condition $f(t) > 0{,}5$ reste vraie et la boucle continue. À $t = 3{,}9$, elle vaut environ $0{,}47$ cm : la condition devient fausse. La variable t conserve alors cette dernière valeur. L'algorithme repère ainsi la fermeture par pas de $0{,}1$ seconde.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $t = 3{,}9$ s : selon l'algorithme, le tiroir est fermé à cet instant.

Question 4. La position moyenne est définie par m = (1/4)∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 - (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

Une primitive de f est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$, car sa dérivée redonne chacun des termes de $f(t)$. On évalue ensuite l'intégrale entre 0 et 4, puis on divise par 4 conformément à la définition de la position moyenne.

$$m = \frac{1}{4}\big(F(4) - F(0)\big) = \frac{1}{4}\left(\frac{45}{2} - \frac{70}{3}e^{-4} + \frac{5}{6}e^{-16}\right).$$

La division de chaque terme par 4 donne l'expression demandée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $m = \dfrac{45}{8} - \dfrac{35}{6}e^{-4} + \dfrac{5}{24}e^{-16}$.

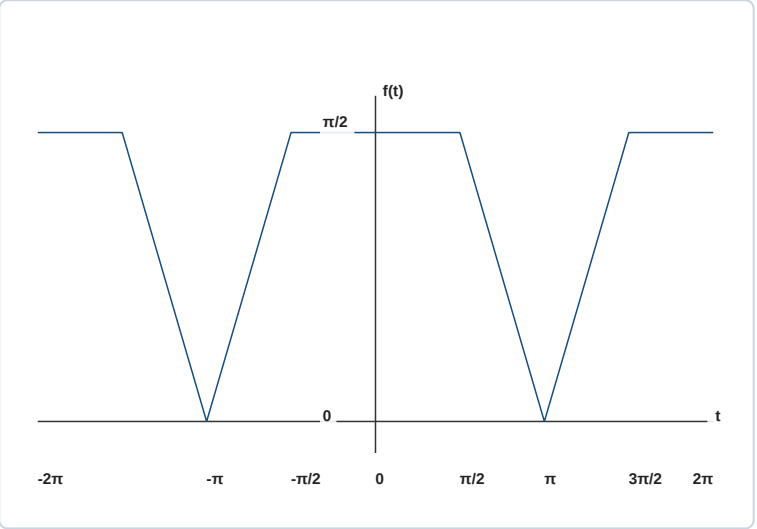
2. Série de Fourier d'une fonction périodique paire

La fonction f est paire, périodique de période 2π, et définie par morceaux sur [0 ; π]. L'exercice porte sur son tracé, ses coefficients de Fourier, une somme partielle et l'approximation de sa valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle [-2π ; 2π], en tenant compte de sa définition par morceaux, de sa parité et de sa périodicité.

La fonction est paire et de période 2π. Sur chaque période, elle vaut $\frac{\pi}{2}$ entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, puis rejoint linéairement zéro en $-\pi$ et en π. On répète ce motif jusqu'aux bornes -2π et 2π.

Tracé de f sur [-2π ; 2π]



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Tracé pair et périodique de période 2π, avec un palier à $\frac{\pi}{2}$ et des zéros en $-\pi$ et π.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

Le formulaire donne $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$. La fonction f est paire, tandis que $\sin(nt)$ est impaire. Leur produit est donc impair. L'intégrale d'une fonction impaire sur l'intervalle symétrique $[-\pi;\pi]$ est nulle.

Parités dans l'intégrande de b_n

Expression	Parité
f(t)	Paire
sin(nt)	Impaire
f(t) sin(nt)	Impaire
Intégrale sur [-π ; π]	Nulle

L'intégrande est impair sur un intervalle symétrique.

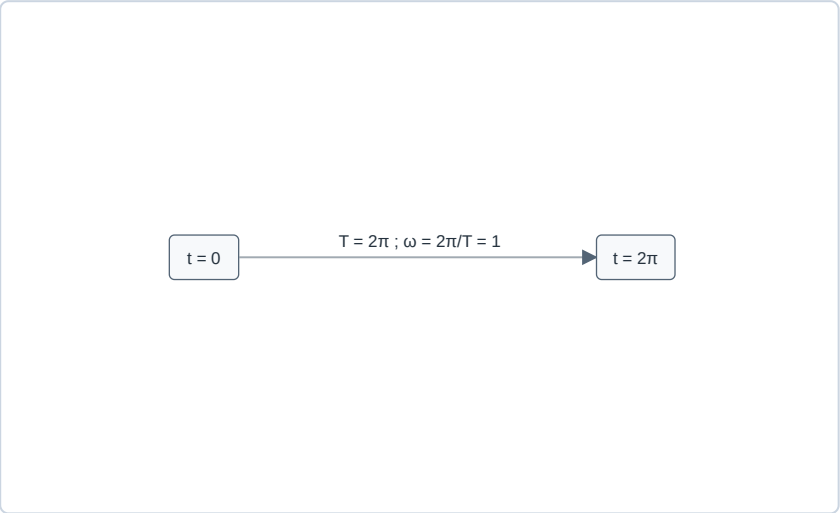
✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.

La pulsation associée à une fonction de période T est $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Ici, $T = 2\pi$, donc $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

Période et pulsation



Une période complète correspond à une pulsation de 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\omega = 1$ radian par unité de temps.

Question 4. Démontrer que le coefficient constant a_0 est égal à 3π/8.

Le formulaire donne $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$. Par parité et périodicité, cela devient $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt$. Sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, l'aire vaut $\frac{\pi^2}{4}$, puis le triangle sur $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ a pour aire $\frac{\pi^2}{8}$. Ainsi, $a_0 = \frac{3\pi^2}{8\pi}$.

Aires sur [0 ; π]

Intervalle	Aire sous la courbe
[0 ; π/2]	π²/4
[π/2 ; π]	π²/8
Total	3π²/8

Le coefficient constant vaut l'aire totale divisée par π.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, aₙ = ∫₀^(π/2) cos(nt)dt + (2/π)∫_(π/2)^π (π - t)cos(nt)dt.

Pour une fonction paire, le formulaire donne $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$. Avec $T = 2\pi$ et $\omega = 1$, le facteur est $\frac{2}{\pi}$. On sépare l'intégrale en $[0;\frac{\pi}{2}]$, où $f(t) = \frac{\pi}{2}$, et $[\frac{\pi}{2};\pi]$, où $f(t) = \pi - t$.

Découpage de l'intégrale de aₙ

Intervalle	f(t)	Contribution à aₙ
[0 ; π/2]	π/2	∫₀^(π/2) cos(nt) dt
[π/2 ; π]	π - t	(2/π) ∫_(π/2)^π (π - t) cos(nt) dt

Les deux contributions donnent l'expression demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_n = \int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt.$

Question 6. En admettant que aₙ = 2/(πn²)(cos(nπ/2) - cos(nπ)), déterminer les valeurs exactes de a₁, a₂ et a₃.

On applique la formule admise. Pour $n = 1$, les cosinus valent 0 et -1. Pour $n = 2$, ils valent -1 et 1. Pour $n = 3$, ils valent 0 et -1. La substitution fournit les trois coefficients exacts.

Calcul des trois coefficients

n	cos(nπ/2)	cos(nπ)	aₙ
1	0	-1	2/π
2	-1	1	-1/π
3	0	-1	2/(9π)

Valeurs obtenues avec la formule donnée dans le sujet.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_1 = \frac{2}{\pi},\quad a_2 = -\frac{1}{\pi},\quad a_3 = \frac{2}{9\pi}.$

Question 7. Déduire l'expression s₃(t) = 3π/8 + (2/π)cos(t) - (1/π)cos(2t) + (2/(9π))cos(3t).

La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))$. Comme $b_n = 0$, on remplace a_0, a_1, a_2, a_3 par les valeurs établies précédemment.

Termes de la somme partielle s_3

Terme	Contribution
a_0	3π/8
$a_1 \cos(t)$	(2/π) cos(t)
$a_2 \cos(2t)$	-(1/π) cos(2t)
$a_3 \cos(3t)$	(2/(9π)) cos(3t)

La somme des contributions est $s_3(t)$.

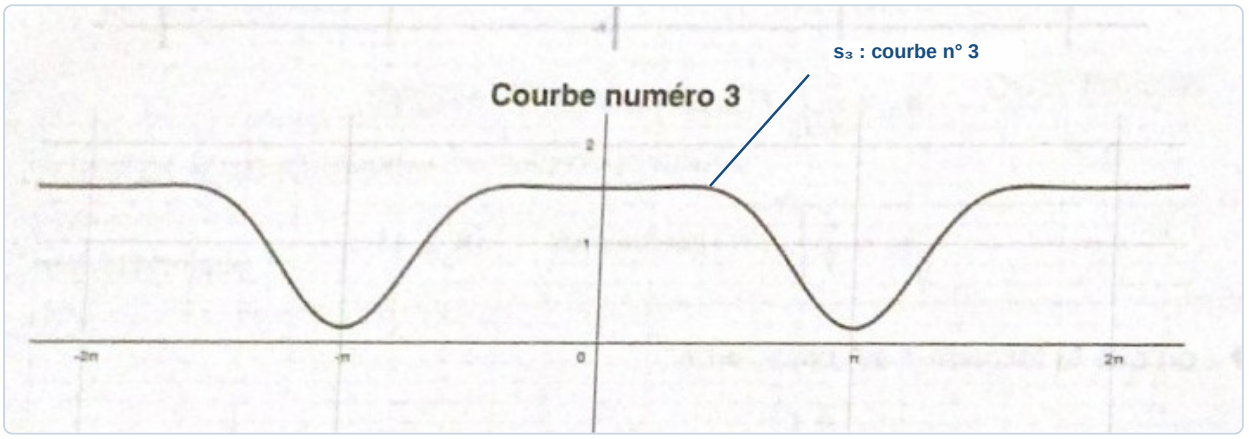
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t)$.

Question 8. Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées est associée à la fonction s_3.

La somme partielle a un maximum près de $t = 0$ et des minima près de $t = -\pi$ et $t = \pi$, au-dessus de l'axe horizontal. Sur les trois graphiques du sujet, ces caractéristiques correspondent à la troisième courbe.

Courbe associée à s_3



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Courbe numéro 3.

Question 9. a. Pour P = $(a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.

Avec $a_0 = \frac{3\pi}{8}$, $a_1 = \frac{2}{\pi}$, $a_2 = -\frac{1}{\pi}$ et $a_3 = \frac{2}{9\pi}$, on obtient $P = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{409}{162\pi^2}$. L'arrondi demandé est au dix-millième.

Calcul de P

Contribution	Valeur approchée
$(a_0)^2 = 9\pi^2/64$	1,3879
$(a_1)^2/2 = 2/\pi^2$	0,2026
$(a_2)^2/2 = 1/(2\pi^2)$	0,0507
$(a_3)^2/2 = 2/(81\pi^2)$	0,0025
Total P	1,6437

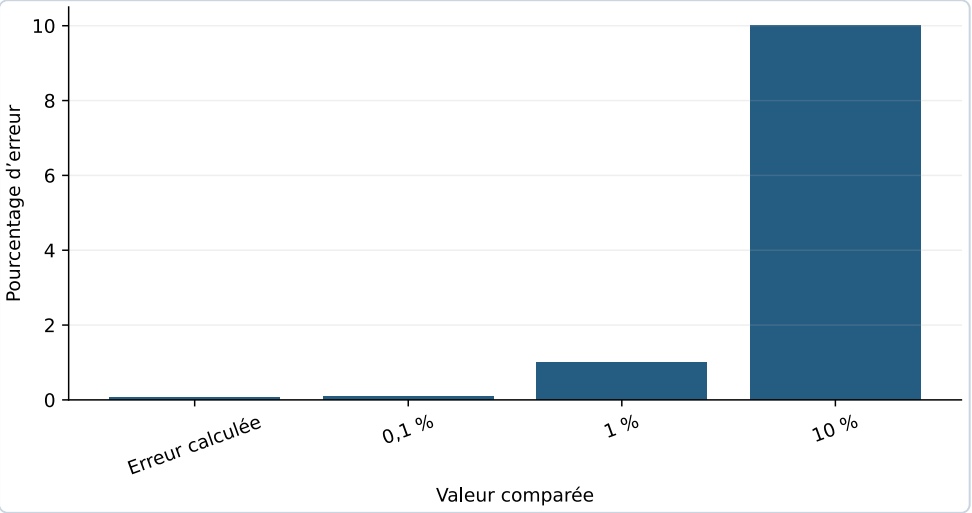
Somme des contributions arrondie à 10^{-4}.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P \approx 1{,}6437.$

Question 9. b. On note F la valeur efficace de f et on admet que $F^2 = \pi^2/6$. Sachant que P constitue une approximation de F^2, choisir le pourcentage d'erreur parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Une seule réponse est attendue, sans justification.

L'erreur relative de l'approximation est $\frac{|F^2 - P|}{F^2} \times 100$. Avec $F^2 = \frac{\pi^2}{6}$ et $P \approx 1{,}6437$, elle vaut environ $0{,}07394\,\%$. Le choix proposé le plus proche est donc $0{,}1\,\%$.



L'erreur calculée est proche du choix 0,1 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

0,1 %

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS Groupement B, session 2023, porte le code 23MATGRB2 et dure 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les exercices étudient la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et analyse, puis les séries de Fourier d'une fonction périodique paire.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, la résolution passe par l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$.
- La dérivée $f'(t)$ représente la vitesse de déplacement ; si elle est négative, la distance OM diminue.
- Pour une période T, la pulsation vaut $\omega = 2\pi/T$; la parité de f entraîne la nullité des coefficients sinus b_n.
- La somme partielle de Fourier $s_n(t)$ utilise les coefficients a_0, a_k et b_k jusqu'au rang n pour approcher f.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités du modèle : f(t) en centimètres et t en secondes.
- Distinguer f(0), distance initiale, de f'(0), vitesse initiale négative.
- Dans l'algorithme, tester la condition à chaque incrément de 0,1 et s'arrêter à la première condition fausse.
- Pour Fourier, exploiter correctement la période, la parité et les formules données dans le formulaire.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment établir la solution de l'équation différentielle du tiroir ?

On résout d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses racines déterminent la forme générale de la solution, puis les conditions initiales permettent de calculer les constantes.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice sur Fourier ?

La fonction f est paire, tandis que $\sin(n\omega t)$ est impaire. Leur produit est impair et son intégrale sur une période centrée en zéro est nulle, ce qui entraîne $b_n = 0$.

Q : Comment déterminer la valeur finale de t dans l'algorithme ?

Partir de t = 0 et ajouter 0,1 tant que $f(t) > 0{,}5$. L'algorithme s'arrête lorsque la condition devient fausse ; la valeur de t à cet instant s'interprète comme le seuil de fermeture recherché.

Q : Quel coefficient s'applique à ma spécialité ?

Le tableau du sujet attribue le coefficient 1,5 à Conception et industrialisation en microtechniques et le coefficient 2 à Électrotechnique. Il faut retenir celui qui correspond à la spécialité du candidat.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmmv.fr/assets/annales/bts-mmv/E2 - Mathématiques/2023/BTS MMV - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Métiers de la Mode Vêtements : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.