Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS MMV

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot pendant son freinage (12 questions) **Page 3**

2. Transformées de Laplace et signaux d'un système électrique (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmmv.fr/assets/annales/bts-mmv/E2 - Mathématiques/2022/BTS MMV - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot pendant son freinage

Un chariot de fête foraine, lancé à 20 m/s, est ralenti par un système de freinage et sa vitesse est modélisée par une fonction vérifiant une équation différentielle. L'exercice étudie cette fonction, la distance parcourue et son développement limité au voisinage de zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre sur l'intervalle considéré l'équation différentielle homogène (E0) : y' + 0,8y = 0.

La formule des solutions de $y' + ay = 0$ donne ici $y(t) = ke^{-0,8t}$, où k est une constante réelle. Cette expression est valable sur tout l'intervalle $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Pour g(t) = 5, vérifier que g est une solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

Comme $g(t) = 5$ est constante, $g'(t) = 0$. En substituant dans le membre de gauche de (E) :

$$g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4.$$

Le résultat est bien le second membre de l'équation.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de (E).

Question 1.c. Déduire des solutions de l'équation homogène et de la solution particulière g l'ensemble des solutions de (E) : y' + 0,8y = 4.

1. Une solution particulière de (E) est $g(t) = 5$.
2. On ajoute à cette solution toutes les solutions de l'équation homogène, soit $ke^{-0,8t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale est $f(t) = ke^{-0,8t} + 5$. La condition initiale impose $f(0) = k + 5 = 20$, donc $k = 20 - 5 = 15$. En remplaçant k, on obtient la fonction recherchée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. À partir de f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Lorsque $t \to +\infty$, on a $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Par conséquent, la limite de la somme $15e^{-0,8t} + 5$ est :

$$15 \times 0 + 5 = 5.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

La fonction tend vers la valeur finie 5 quand t tend vers $+\infty$. La courbe admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 5$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. En utilisant f'(t) = -12e^(-0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) < 0$. La fonction est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et $f(t) \to 5$.

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Le terme exponentiel est strictement positif pour tout $t \geq 0$. Ainsi, la vitesse reste toujours supérieure à $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et tend vers 5, sans atteindre zéro. Le chariot ne s'arrête donc pas selon ce modèle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, sans atteindre zéro.

Question 4.a. **Vérifier que F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

On dérive les deux termes de F :

$$F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t).$$

Donc F est bien une primitive de f sur $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4.b. **En utilisant l'intégrale de la vitesse entre t = 0 et t = 1, calculer la distance parcourue par le chariot. Donner la valeur exacte puis une valeur arrondie au centimètre.**

Par le théorème fondamental, $d = F(1) - F(0)$. Ainsi, $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$. La valeur approchée est $15,3251$ m, soit $15,33$ m au centimètre près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Choisir la proposition donnant le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Parmi les trois propositions, la troisième est la seule qui conserve le terme en $-12t$ et écrit le reste à l'ordre 2 sous la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Troisième proposition : $f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente en $t = 0$ est $y = f(0) + f'(0)t$. On a $f(0) = 20$ et $f'(0) = -12e^0 = -12$, d'où :

$$y = 20 - 12t.$$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t.$

2. Transformées de Laplace et signaux d'un système électrique

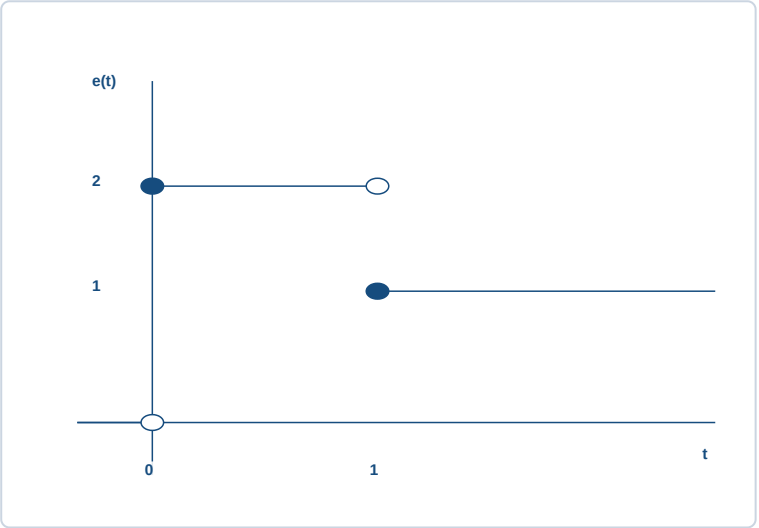
Un système électrique reçoit le signal causal e(t) = 2U(t) - U(t - 1) et possède pour fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1). L'exercice demande de représenter le signal d'entrée puis d'étudier le signal de sortie à l'aide des transformées de Laplace et de leurs propriétés.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

Comme le signal est causal, il vaut zéro pour $t < 0$. À $t = 0$, $U(0) = 1$, donc le signal saute à 2. À $t = 1$, le terme $U(t-1)$ devient égal à 1 : le signal prend alors la valeur 1. Le tracé distingue les points ouverts et pleins aux deux instants de saut.

Signal d'entrée e(t)



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$e(t) = 0$ si $t < 0$, $e(t) = 2$ si $0 \leq t < 1$, et $e(t) = 1$ si $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée.

On applique la linéarité de la transformée de Laplace et la formule du retard donnée dans le formulaire. Ainsi, $2U(t)$ a pour transformée $2/p$, tandis que $U(t-1)$ a pour transformée e^{-p}/p. La transformée du signal d'entrée est donc la différence de ces deux transformées.

Signal	Transformée de Laplace
$2U(t)$	$\frac{2}{p}$
$U(t-1)$	$\frac{e^{-p}}{p}$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$E(p) = \frac{2-e^{-p}}{p}$.

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/[p(p + 1)]]e^(-p).

1. La relation du système donne $S(p) = H(p)E(p)$.
2. En remplaçant par $H(p) = \frac{1}{p+1}$ et $E(p) = \frac{2-e^{-p}}{p}$, on obtient $S(p) = \frac{2-e^{-p}}{p(p+1)}$.
3. En séparant les deux termes, on retrouve l'expression demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}$.

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

On réduit le membre de droite au même dénominateur. Son numérateur vaut $(p+1) - p = 1$, ce qui donne bien le membre de gauche. La décomposition est valable lorsque les dénominateurs sont non nuls, soit pour $p \neq 0$ et $p \neq -1$.

```
1/p - 1/(p + 1) = ((p + 1) - p)/(p(p + 1))
```

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$.

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de (1/p)e^(-p) et de (1/(p + 1))e^(-p).

Les deux premières transformées inverses sont usuelles. Pour les deux dernières, on applique la propriété de retard d'une unité : si $F(p)$ est la transformée de $f(t)$, alors $F(p)e^{-p}$ correspond à $f(t-1)U(t-1)$.

Transformée	Transformée inverse
$\frac{1}{p}$	$U(t)$
$\frac{1}{p+1}$	$e^{-t}U(t)$
$\frac{e^{-p}}{p}$	$U(t-1)$
$\frac{e^{-p}}{p+1}$	$e^{-(t-1)}U(t-1)$

✓ RÉPONSE À RETENIR

Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

La décomposition en éléments simples donne $S(p) = 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) - e^{-p}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)$. Sur $[0;1[$, les termes retardés sont nuls, car $U(t-1) = 0$. Il reste donc la transformée inverse de $2/p - 2/(p+1)$.

Ainsi, sur l'intervalle considéré, $s(t) = 2 - 2e^{-t}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$s(t) = 2(1 - e^{-t})$ pour $0 \leq t < 1$.

Question 5.a. Sachant que s(t) = (e - 2)e^(-t) + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1). Donner la valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.

On évalue l'expression donnée pour $t \geq 1$ en prenant $t = 1$: $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1$. Comme $(e-2)e^{-1} = 1 - 2/e$, on obtient la forme exacte. L'approximation au dixième est calculée à partir de cette valeur.

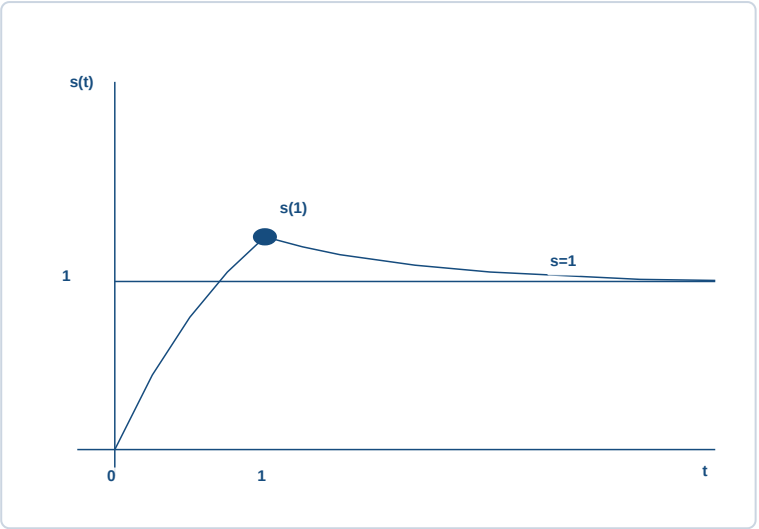
✓ RÉPONSE À RETENIR

$s(1) = 2 - \frac{2}{e} \approx 1,3$.

Question 5.b. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.

1. Sur $[0;1]$, tracer la branche croissante $s(t) = 2(1 - e^{-t})$, de $(0;0)$ à $(1; 2 - 2/e)$.
2. À partir de $t = 1$, tracer la branche $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$, décroissante et se rapprochant de la droite horizontale $s = 1$.

Courbe du signal de sortie s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe croît de 0 à $2 - 2/e$ jusqu'à $t = 1$, puis décroît vers l'asymptote horizontale $s = 1$.

Question 5.c. Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, on écrit $s(t) = 1 + (e - 2)e^{-t}$. Le coefficient $e - 2$ est constant et e^{-t} tend vers zéro lorsque t tend vers $+\infty$. Le terme exponentiel disparaît donc à la limite, laissant le terme constant.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en électrotechnique. Les deux exercices de 10 points étudient le freinage d'un chariot et la réponse d'un système électrique, en mobilisant équations différentielles, intégrales et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- La solution générale de y' + ay = b s'obtient en ajoutant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène.
- Si f(t) tend vers L quand t tend vers +∞, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue entre t0 et t1 est l'intégrale de la vitesse : d = ∫[t0,t1] f(t) dt.
- Un retard d'une unité correspond au facteur e^(-p) en transformée de Laplace et à un décalage temporel du signal.

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale f(0) = 20 à la solution générale de l'équation différentielle.
- Ne pas confondre ralentissement et arrêt : une vitesse qui tend vers 5 m/s ne tend pas vers zéro.
- Pour la distance, évaluer la primitive aux deux bornes et arrondir au centimètre comme demandé.
- Pour les signaux, respecter le décalage associé à e^(-p) et compléter les tracés sur le document-réponse.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment trouver la solution de l'équation différentielle du chariot ?

Résolvez d'abord l'équation homogène y' + 0,8y = 0, puis ajoutez la solution particulière constante g(t) = 5. La condition f(0) = 20 permet ensuite de déterminer la constante de la solution correspondant à la vitesse.

Q : Comment savoir si le chariot finit par s'arrêter ?

Examinez la limite de sa vitesse lorsque le temps tend vers +∞. Le chariot s'arrête si cette vitesse tend vers zéro. Ici, la limite vaut 5 m/s, donc le modèle ne décrit pas un arrêt complet.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Le sujet comporte deux exercices de 10 points chacun. Gérez le temps entre l'étude du freinage et celle du système électrique, et gardez une marge pour les tracés sur le document-réponse ainsi que pour vérifier unités, calculs et arrondis.

Q : Quels éléments faut-il soigner dans les réponses et les tracés ?

Le sujet demande des calculs exacts, parfois complétés par une valeur approchée, et des représentations sur le document-réponse. Respectez les intervalles indiqués, justifiez les vérifications demandées et rendez les courbes lisibles avec leurs repères.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmmv.fr/assets/annales/bts-mmv/E2 - Mathématiques/2022/BTS MMV - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Métiers de la Mode Vêtements : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.