Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS MMV

Épreuve de mathématiques - Groupement B

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Freinage d'un chariot et étude d'une fonction exponentielle** (12 questions) — **Page 3**
2. **Probabilités de défaut, durée de vie et conformité de rivets** (9 questions) — **Page 7**
3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmmv.fr/assets/annales/bts-mmv/E2 - Mathématiques/2022/BTS MMV - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot et étude d'une fonction exponentielle

Un chariot de fête foraine se déplace initialement à 20 m/s, puis est ralenti par un système de freinage. L'étude modélise sa vitesse par une fonction exponentielle et mobilise les équations différentielles, les variations, les limites, les primitives, les intégrales, les développements limités et les tangentes.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. **Résoudre l'équation différentielle homogène (E_0) : y' + 0,8y = 0.**

La formule fournie dans le sujet donne, pour une équation de la forme $y' + ay = 0$, les solutions $y(t) = ke^{-at}$. Ici, le coefficient est $a = 0,8$. En le remplaçant dans cette formule, on obtient l'ensemble des solutions sur l'intervalle considéré, où k est une constante réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. **On définit g(t) = 5 sur [0 ; +∞[. Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.**

La fonction g est constante, donc sa dérivée est nulle : $g'(t) = 0$. En remplaçant y par g dans le membre de gauche de l'équation, on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Cette valeur est égale au membre de droite de (E) pour tout $t \geq 0$: g est bien une solution particulière.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g'(t) + 0,8g(t) = 4$: g est solution de (E).

Question 1. c. **Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.**

1. Une solution particulière de (E) est $g(t) = 5$.
2. Les solutions de l'équation homogène associée sont $ke^{-0,8t}$.
3. On obtient toutes les solutions de (E) en ajoutant la solution particulière à celles de l'équation homogène.

La constante k peut prendre toute valeur réelle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale trouvée à la question précédente est $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. La condition initiale impose $f(0) = 20$. Comme $e^0 = 1$, on a $5 + k = 20$, d'où $k = 15$. En remplaçant la constante dans la solution générale, on obtient la fonction recherchée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Pour f(t) = 15e^(-0,8t) + 5 sur [0 ; +∞[, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

On a $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Quand t tend vers +∞, l'exposant $-0,8t$ tend vers -∞. L'exponentielle tend donc vers zéro. Le produit $15e^{-0,8t}$ tend également vers zéro, tandis que le terme constant reste égal à 5. Par somme, la limite de $f(t)$ vaut 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote, puis en donner une équation.

Si une fonction tend vers une limite finie lorsque sa variable tend vers +∞, sa courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$, où ℓ est cette limite. Ici, d'après la question précédente, la limite de $f(t)$ est égale à 5. La courbe représentative C admet donc une asymptote horizontale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale de C : $y = 5$.

Question 2. Sachant que f'(t) = -12e^(-0,8t) sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$: la fonction est strictement décroissante. Son départ vaut $f(0) = 15 + 5 = 20$ et sa limite en +∞ est 5.

t	0	$+\infty$
Signe de $f'(t)$		–
Variation de f	20	↘ 5

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 à 5 sur $[0 ; +\infty[$.

Question 3. À partir de l'étude de la vitesse f, déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

La vitesse diminue continuellement, mais sa limite lorsque le temps augmente est égale à 5 m/s. De plus, pour tout instant fini, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. Le terme $15e^{-0,8t}$ reste donc positif et la vitesse ne peut pas atteindre zéro selon ce modèle.

- Le chariot ralentit.
- Il ne s'arrête pas.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse reste supérieure à 5 m/s et tend vers 5 m/s.

Question 4. a. On définit F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t sur [0 ; +∞[. Vérifier que F est une primitive de f sur cet intervalle.

On dérive chaque terme de $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. Par la règle de dérivation d'une exponentielle composée, on obtient $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5$. Or $18,75 \times 0,8 = 15$, donc $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$. Ainsi, F est une primitive de f.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4. b. À l'aide de la formule d = ∫ de t_0 à t_1 f(t)dt, calculer la distance exacte parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

Par le théorème fondamental, $d = F(1) - F(0)$. En utilisant l'expression de F, cela donne $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75)$, soit $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$. Cette valeur exacte est environ $15,3251$ m ; au centimètre près, on arrondit à deux décimales.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$d = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0{,}8}$ m ≈ 15,33 m.

Partie C - Étude locale

Question 1. Choisir l'unique proposition correcte donnant le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Recopier la réponse choisie ; aucune justification n'est demandée.

Le développement limité à l'ordre 2 doit s'écrire comme le polynôme de Taylor augmenté d'un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Parmi les choix proposés, seul le troisième présente ce reste d'ordre strictement supérieur à 2. Il reprend le polynôme affiché par le logiciel, avec le coefficient quadratique $24/5 = 4{,}8$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Troisième proposition : $20 - 12t + 4{,}8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. D'après l'énoncé, $f(0) = 20$ et $f'(t) = -12e^{-0{,}8t}$, donc $f'(0) = -12$. En substituant ces deux valeurs dans l'équation de la tangente, on obtient la droite demandée.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$T : y = 20 - 12t$.

2. Probabilités de défaut, durée de vie et conformité de rivets

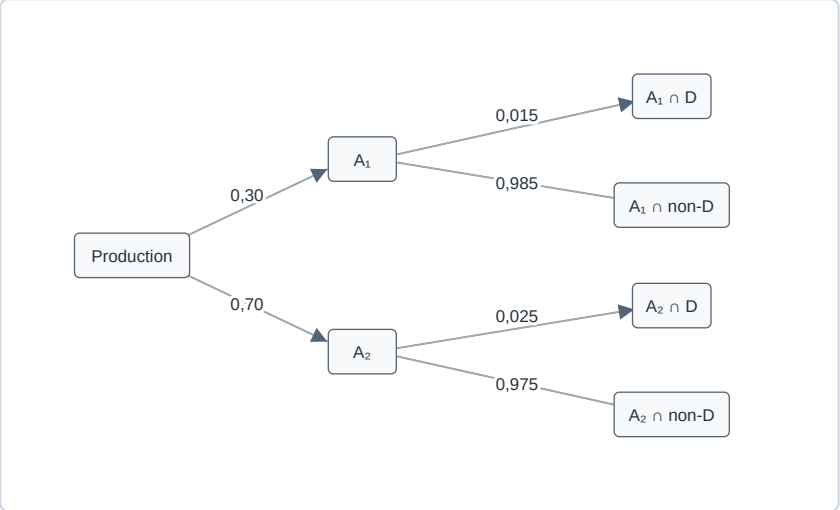
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers, avec des proportions de production et des taux de défaut différents ; l'exercice étudie aussi leur durée de bon fonctionnement. Une dernière partie porte sur l'estimation de la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon de 1 000 rivets.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation, en indiquant les proportions de production des ateliers 1 et 2, ainsi que les probabilités de défaut et de non-défaut correspondantes.

Les premières branches indiquent l'atelier d'origine. Depuis chaque atelier, les branches suivantes donnent les probabilités conditionnelles de défaut et de non-défaut, qui sont complémentaires.

Arbre pondéré des ateliers et des défauts



Les probabilités des branches issues d'un atelier sont conditionnelles à cet atelier.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Depuis la production : A_1 : 0,30 ; A_2 : 0,70. Depuis A_1 : D : 0,015 ; non-D : 0,985. Depuis A_2 : D : 0,025 ; non-D : 0,975.

Question 2. Calculer la probabilité $P(A_1 \cap D)$, où A_1 désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

La probabilité conjointe est le produit de la proportion issue de l'atelier 1 par le taux de défaut de cet atelier : $P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P(D \mid A_1) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0,0045$, soit 0,45 %.

Question 3. **Montrer que la probabilité qu'un tube choisi au hasard dans la production totale présente un défaut est P(D) = 0,022.**

Les ateliers 1 et 2 forment une partition de la production. La formule des probabilités totales donne :

$P(D) = 0,30 \times 0,015 + 0,70 \times 0,025 = 0,022.$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0,022$, soit 2,2 %.

Question 4. **Sachant que le tube choisi ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

La probabilité recherchée est $P(A_2 \mid \overline{D})$. La proportion sans défaut vaut $1 - 0,022 = 0,978$, et la probabilité d'être issu de l'atelier 2 et sans défaut vaut $0,70 \times 0,975$.

1. $P(A_2 \mid \overline{D}) = \dfrac{0,70 \times 0,975}{0,978} \approx 0,698.$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0,698$, soit 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **La durée de bon fonctionnement T suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.**

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance est $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$. Avec $\lambda = 0,0001$ par heure, $E(T) = \dfrac{1}{0,0001} = 10\,000$ heures. C'est la durée moyenne de bon fonctionnement des tubes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 10\,000$ heures.

Question 2. **Calculer, avec un arrondi à 10^{-2}, la probabilité qu'un tube fluorescent choisi au hasard ait une durée de bon fonctionnement inférieure à 8 000 heures.**

La formule donnée est $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. La loi étant continue, $P(T < 8\,000) = P(T \leq 8\,000)$.

$P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0,0001 \times 8\,000} \approx 0,5507$, soit 0,55 au centième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T < 8\,000) \approx 0,55$.

Question 3. Calculer, avec un arrondi à 10^{-2}, la probabilité qu'un tube fluorescent choisi au hasard ait une durée de bon fonctionnement supérieure à 10 000 heures.

La probabilité de dépasser 10 000 heures est la probabilité complémentaire de $T \leq 10\,000$:
$P(T > 10\,000) = e^{-0,0001 \times 10\,000} = e^{-1} \approx 0,3679$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T > 10\,000) \approx 0,37$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. À partir des 975 rivets conformes observés parmi les 1 000 rivets prélevés, donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes.

L'estimation ponctuelle est la fréquence observée de rivets conformes : $\hat{p} = \dfrac{975}{1\,000} = 0,975$. Elle estime la proportion de rivets conformes dans la production.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\hat{p} = 0,975$, soit 97,5 %.

Question 2. Déterminer, à partir de la formule fournie, un intervalle de confiance centré sur la fréquence observée pour la proportion p au niveau de confiance de 95 %. Arrondir les bornes à 10^{-3} près.

Avec $f = 0,975$ et $n = 1\,000$, la marge est $1,96\sqrt{\dfrac{0,975(1-0,975)}{1\,000}} \approx 0,009677$.

Les bornes sont environ 0,965323 et 0,984677. Arrondies au millième, elles donnent l'intervalle demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0,965\ ;\ 0,985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, porte le code 22MATGRB1 et dure 2 heures ; le coefficient est 2, ou 3 en Traitement des matériaux. Elle étudie le freinage d'un chariot, les défauts et la durée de vie de tubes fluorescents, puis la conformité de rivets. Les compétences évaluées couvrent équations différentielles, fonctions, intégrales et probabilités.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = 0 sont de la forme y(t) = ke^(-at) ; une solution particulière complète la solution de l'équation avec second membre.
- Pour f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, la limite en +∞ vaut 5 et f'(t) < 0, donc f est décroissante.
- Si T suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors E(T) = 1/λ, P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt) et P(T > t) = e^(-λt).
- L'intervalle de confiance à 95 % fourni pour une proportion est f ± 1,96√(f(1-f)/n), où f est la fréquence observée.

Points de vigilance & attentes du jury

- Dans un arbre pondéré, inscrire d'abord les proportions de production puis les probabilités conditionnelles de défaut et de non-défaut.
- Pour P(A_2 sachant non-D), diviser P(A_2 ∩ non-D) par P(non-D) et identifier clairement l'événement conditionnant.
- Pour la distance, calculer F(1) - F(0), conserver la valeur exacte puis convertir l'arrondi demandé en centimètres.
- Pour le QCM de développement limité, une seule réponse est exacte ; recopier une seule proposition et ne pas ajouter de justification.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment construire l'arbre pondéré des deux ateliers ?

La première séparation porte sur l'atelier : 0,30 pour l'atelier 1 et 0,70 pour l'atelier 2. Depuis chaque atelier, inscrire son taux de défaut, puis le taux complémentaire de non-défaut.

Q : Comment calculer une probabilité de durée supérieure à 10 000 heures ?

Pour une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001, utiliser P(T > t) = e^(-λt). Remplacer t par 10 000, effectuer le calcul puis arrondir le résultat à 10^{-2}.

Q : Quelle est la durée de l'épreuve et comment sont répartis les exercices ?

L'épreuve dure 2 heures et comprend deux exercices notés chacun sur 10 points. Les trois parties de chaque exercice peuvent être traitées indépendamment, ce qui permet de poursuivre une partie même si une question précédente est difficile.

Q : Quelles précautions prendre pour l'intervalle de confiance des rivets ?

La fréquence observée est 975/1 000 et l'effectif est n = 1 000. Appliquer la formule à 95 % fournie dans le sujet, puis arrondir séparément les deux bornes à 10^{-3} près.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmmv.fr/assets/annales/bts-mmv/E2 - Mathématiques/2022/BTS MMV - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Métiers de la Mode Vêtements : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.