BTS Électrotechnique – Session 2025

Épreuve de Mathématiques – Groupement B

- **Code sujet :** 25MATGRB3
- **Durée :** 2 heures
- **Calculatrice autorisée :** Oui (mode examen actif ou « type collège » sans mémoire)

EXERCICE 1 (10 points)

Résumé de l'énoncé

On étudie le refroidissement d'une plaque d'aluminium. La température f(t) (en °C) à l'instant t (en minutes) est modélisée par une équation différentielle et une fonction exponentielle. L'exercice comporte deux parties indépendantes : résolution d'équation différentielle (Partie A) et étude de la fonction (Partie B).

PARTIE A – Équation différentielle

1. Résolution de l'équation différentielle homogène

On cherche les solutions de $y' + 0{,}25y = 0$.

- Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.
- D'après la formule fournie :

  > *y' + a y = 0 a pour solutions y(t) = k e^{-a t} où k ∈ ℝ.*

- Ici, a = 0,25, donc : $y(t) = k\, e^{-0{,}25\, t}$

Les solutions de $y' + 0{,}25y = 0$ sont : $y(t) = k\, e^{-0{,}25\, t}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Point de méthode : Pour une équation différentielle du type $y' + a\, y = 0$, la solution générale est toujours une exponentielle décroissante si $a > 0$.
Erreur fréquente : Oublier le signe moins dans l'exposant ou confondre le coefficient de t.

2. Recherche d'une solution constante de l'équation complète

On cherche $g(t) = c$ solution de $y' + 0{,}25y = 7{,}5$.

- La dérivée de g est nulle : $g'(t) = 0$.
- On remplace dans l'équation : $0 + 0{,}25c = 7{,}5$ donc $c = 7{,}5 / 0{,}25 = 30$.

La solution constante est $g(t) = 30$.

Point de méthode : Pour une équation différentielle avec second membre constant, une solution particulière constante s'obtient en posant la dérivée nulle.
Erreur fréquente : Oublier de diviser par le coefficient de y.

3. Ensemble des solutions de l'équation complète

L’équation complète est $y' + 0,25y = 7,5$.

- La solution générale est la somme d’une solution de l’homogène et d’une solution particulière :
- $y(t) = k e^{-0,25 t} + 30, \quad k \in \mathbb{R}$

Toutes les solutions sont $y(t) = k e^{-0,25 t} + 30$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Point de méthode : Solution générale = solution homogène + solution particulière.
Erreur fréquente : Oublier d’ajouter la solution particulière.

4. Détermination de la fonction f connaissant $f(0) = 250$

On cherche k tel que $f(0) = k e^{0} + 30 = 250$.
Donc $k + 30 = 250 \Rightarrow k = 220$.

$f(t) = 220 e^{-0,25 t} + 30$

Point de méthode : Utiliser la condition initiale pour déterminer la constante d’intégration.
Erreur fréquente : Oublier d’appliquer la condition initiale ou mal calculer k.

PARTIE B – Étude de la fonction

On considère $f(t) = 220 e^{-0,25 t} + 30$ pour $t \geq 0$.

1. Température après un quart d’heure (15 minutes)

On calcule $f(15) = 220 e^{-0,25 \times 15} + 30$.

- $0,25 \times 15 = 3,75$
- $e^{-3,75} \approx 0,0235$ (à la calculatrice)
- $220 \times 0,0235 \approx 5,17$
- $f(15) \approx 5,17 + 30 = 35,2$ (arrondi à 0,1°C)

Après 15 minutes, la température est $35,2$ °C (arrondi à 0,1°C).

Point de méthode : Attention à bien utiliser la calculatrice pour l’exponentielle négative.
Erreur fréquente : Oublier d’ajouter 30 ou mal arrondir.

2. Limite de f en $+\infty$ et interprétation

- $\lim_{t \to +\infty} e^{-0,25 t} = 0$
- Donc $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0 + 30 = 30$

Conséquence pour la courbe : la courbe admet une asymptote horizontale d’équation $y = 30$.

Interprétation : La température de la plaque tend vers 30°C lorsque le temps de refroidissement devient très grand. Cela correspond à la température ambiante.

$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 30$.
La courbe admet une asymptote horizontale $y = 30$.

Interprétation : la plaque finit par atteindre la température ambiante.

Point de méthode : La limite d'une exponentielle négative en $+\infty$ est toujours 0.
Erreur fréquente : Dire que la température devient nulle (au lieu de tendre vers 30).

3. Dérivée et variations de f

On dérive $f(t) = 220\, e^{-0,25\, t} + 30$:

- $f'(t) = 220 \times (-0,25)\, e^{-0,25\, t} + 0 = -55\, e^{-0,25\, t}$
- Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,25\, t} > 0$, donc $f'(t) < 0$.
- f est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

Interprétation : la température de la plaque diminue continuellement au cours du temps.

$f'(t) = -55\, e^{-0,25\, t}$.
f est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

Point de méthode : Dériver une fonction de la forme $A\, e^{kt}$ donne $A\, k\, e^{kt}$.
Erreur fréquente : Oublier le signe négatif ou la dérivée de l'exposant.

4. Vérification de l'affirmation du technicien et calcul du temps pour passer sous 150°C

- En cent secondes : 100 s = 1 min 40 s = 1,666... min
- Calculons la température après 1,67 min :
  - $f(1,67) = 220\, e^{-0,25 \times 1,67} + 30$
  - $0,25 \times 1,67 \approx 0,4175$
  - $e^{-0,4175} \approx 0,6588$
  - $220 \times 0,6588 \approx 144,94$
  - $f(1,67) \approx 144,94 + 30 = 174,94$
- La température n'a donc pas baissé de 100°C (elle passe de 250°C à ≈ 175°C, soit une perte de 75°C environ).
- Durée pour passer sous 150°C :
  - On cherche t tel que $f(t) < 150$
  - $220\, e^{-0,25\, t} + 30 < 150$
  - $220\, e^{-0,25\, t} < 120 \Rightarrow e^{-0,25\, t} < 120 / 220 = 0,5455$
  - $-0,25\, t < \ln(0,5455) \Rightarrow -0,25\, t < -0,606$
  - $t > 0,606 / 0,25 = 2,424$ min
  - 2,424 min = 2 min 25,4 s ≈ 145 s (arrondi à la seconde)

- **L'affirmation du technicien est fausse : en 100 s, la plaque ne perd pas 100°C.**
- **La durée nécessaire pour passer sous 150°C est 145 secondes (arrondi à la seconde).**

Point de méthode : Pour résoudre une inéquation de la forme $A\, e^{kt} + B < C$, isoler l'exponentielle puis prendre le logarithme.
Erreur fréquente : Oublier de convertir les minutes en secondes ou se tromper dans le sens de l'inégalité après le logarithme.

5. Croquis de la courbe représentative de f

Le croquis doit montrer :

- Une courbe strictement décroissante partant de $f(0) = 250$ (ordonnée à l'origine)
- Asymptote horizontale $y = 30$
- Point (15 ; 35,2) (température après 15 min)
- Abscisse $t \approx 2,4$ min où la courbe passe sous 150°C

À réaliser à la main sur la copie, en soignant l'échelle et en plaçant les points remarquables.

Point de méthode : Toujours indiquer les axes, l'asymptote, et les points calculés dans les questions précédentes.
Erreur fréquente : Oublier de placer l'asymptote ou de respecter la décroissance de la courbe.

EXERCICE 2 (10 points)

Résumé de l'énoncé

On étudie un signal périodique $u(t)$ de période π, défini par $u(t) = t$ sur $[0 ; \pi[$. On demande des valeurs, un croquis, l'étude de la valeur moyenne, la fréquence, la pulsation, et le calcul de coefficients de Fourier et d'amplitudes.

1. Calcul de quelques valeurs de u

- $u(1) = 1$ (car $1 \in [0 ; \pi[$)
- $u(\pi) = u(0) = 0$ (car u est périodique de période π)
- $u(\pi + 1) = u(1) = 1$ (car $\pi + 1 - \pi = 1$)
- $u(4)$: $\pi \approx 3,14$, donc $4 = \pi + 0,86$, donc $u(4) = u(0,86) = 0,86$

- **$u(1) = 1$**
- **$u(\pi) = 0$**
- **$u(\pi + 1) = 1$**
- **$u(4) \approx 0,86$**

Point de méthode : Pour une fonction périodique de période π, $u(t) = u(t - k\pi)$ où k est l'entier tel que $t - k\pi \in [0 ; \pi[$.
Erreur fréquente : Oublier la périodicité ou mal calculer le reste.

2. Croquis du signal $u(t)$

Sur chaque intervalle $[k\pi ; (k+1)\pi[$, $u(t)$ est une droite de pente 1 démarrant à 0 et montant jusqu'à π (non inclus), puis repart à 0. Sur trois périodes, le signal est une suite de « dents de scie ».

Point de méthode : Pour un signal en « rampe » périodique, bien montrer la discontinuité à chaque multiple de π.
Erreur fréquente : Tracer une droite continue au lieu d'un signal périodique.

3. Signal alternatif ?

Un signal est alternatif si sa valeur moyenne sur une période est nulle.

- $a_0 = (1/\pi) \int_0^\pi t \, dt = (1/\pi) \times [t^2/2]_0^\pi = (1/\pi) \times (\pi^2/2) = \pi/2$
- La valeur moyenne est $\pi/2 \neq 0$

u(t) n'est pas un signal alternatif car sa valeur moyenne est $\pi/2$ et non nulle.

Point de méthode : La valeur moyenne sur une période se calcule par $(1/T) \int_0^T u(t)\, dt$.
Erreur fréquente : Croire que tout signal périodique est alternatif.

4. Fréquence et pulsation

- Période $T = \pi$
- Fréquence $f = 1/T = 1/\pi \approx 0{,}318$ Hz
- Pulsation $\omega = 2\pi/T = 2$ rad/s

$f = 1/\pi \approx 0{,}318$ Hz ; $\omega = 2$ rad/s

Point de méthode : $f = 1/T$; $\omega = 2\pi/T$.
Erreur fréquente : Inverser T et f, ou oublier le facteur 2 dans la pulsation.

5. Calcul des coefficients de Fourier b_n

On admet que $\int_0^\pi t \sin(2n\, t)\, dt = -\pi/(2n)$.

- D'après le formulaire : $b_n = (2/\pi) \int_0^\pi t \sin(2n\, t)\, dt = (2/\pi) \times (-\pi/(2n)) = -1/n$

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = -1/n$.

Point de méthode : Bien utiliser le coefficient $2/\pi$ devant l'intégrale.
Erreur fréquente : Oublier le signe ou le facteur n au dénominateur.

6. Calcul des amplitudes A_n et tableau

On a $A_0 = |a_0| = \pi/2$ et pour $n \geq 1$, $A_n = |b_n| = 1/n$ (car $a_n = 0$).

n	0	1	2	3	4
Valeur exacte de A_n	$\pi/2$	1	1/2	1/3	1/4
Valeur approchée à 10^{-2} près	1,57	1,00	0,50	0,33	0,25

- $A_0 = \pi/2 \approx 1{,}57$
- $A_1 = 1$
- $A_2 = 0{,}5$
- $A_3 \approx 0{,}33$
- $A_4 = 0{,}25$

Point de méthode : Pour un coefficient nul, l'amplitude est simplement la valeur absolue de l'autre

coefficient.
Erreur fréquente : Oublier d'arrondir à 10^{-2} près.

7. Analyse des spectres

A_n est décroissant en fonction de n et non nul pour $n \geq 1$.

- 7.a. Spectre 2 : Si le spectre présente des amplitudes nulles pour certains $n \geq 1$, ce n'est pas possible ici car $A_n \neq 0$ pour tout $n \geq 1$.
- 7.b. Spectre 3 : Si le spectre présente des amplitudes croissantes ou non monotones, ce n'est pas possible car A_n doit décroître en $1/n$.

- **Spectre 2 ne peut pas être celui de $u(t)$ car il présente des amplitudes nulles pour certains $n \geq 1$, ce qui n'est pas le cas ici.**
- **Spectre 3 ne peut pas être celui de $u(t)$ car les amplitudes ne décroissent pas régulièrement comme $1/n$.**

Point de méthode : Pour un spectre de type $1/n$, les amplitudes décroissent et aucune n'est nulle pour $n \geq 1$.
Erreur fréquente : Ne pas relier la forme du spectre à la décroissance des amplitudes.

Formulaire récapitulatif

- $y' + a y = 0 \rightarrow y(t) = k e^{-a t}$
- Solution générale d'une équation différentielle linéaire du premier ordre non homogène : $y(t) = k e^{-a t} + \text{(solution particulière)}$
- Dérivée de $A e^{kt}$: $A k e^{kt}$
- Limite : $\lim_{t\to+\infty} e^{-a t} = 0$
- Fréquence : $f = 1/T$; Pulsation : $\omega = 2\pi/T$
- Valeur moyenne sur une période : $a_0 = (1/T) \int_0^T f(t)\, dt$
- Coefficients de Fourier :
  - $a_n = (2/T) \int_0^T f(t) \cos(n\omega t)\, dt$
  - $b_n = (2/T) \int_0^T f(t) \sin(n\omega t)\, dt$
- Amplitude : $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

Conseils généraux pour réussir l'épreuve de mathématiques en BTS

1. **Lisez attentivement l'énoncé** : repérez les données, les questions et les unités. Soulignez les mots-clés.
2. **Soignez la rédaction** : chaque étape doit être justifiée, même les calculs simples. Expliquez vos raisonnements.
3. **Utilisez la calculatrice à bon escient** : vérifiez vos arrondis et gardez les valeurs exactes le plus longtemps possible.
4. **Vérifiez la cohérence des résultats** : une température négative ou une fréquence supérieure à 1 GHz sont souvent des erreurs de calcul ou d'unité.
5. **En cas de blocage, passez à la question suivante** : le barème est souvent indépendant, ne perdez pas de temps sur un point difficile.